APENDICE
REGLAS Y LEYES
DE LA LOGICA DE PRIMER ORDEN

Una *regla lógica*, o *regla de inferencia* (deductiva), es una forma *válida* de razonamiento que es empleada para inferir deductivamente ciertos enunciados a partir de otros. La simplicidad, el carácter evidente, su uso a lo largo de la historia de la lógica y el hecho de representar propiedades básicas de las expresiones lógicas están entre las razones que conducen a la adopción de una forma de razonamiento como regla de inferencia. Son reglas en el sentido de que prescriben la afirmación de la conclusión a partir de premisas. De este modo, las reglas e expresan por medio de la siguiente forma general para el LPO: "A partir de los enunciados $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ ..., $\mathbf{P}_n$ infiérase el enunciado **C**", que se puede presentar gráficamente como

$$\begin{array}{c} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_n \\ \hline \mathbf{C}\ , \end{array}$$

o también, en una representación horizontal como

$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 ..., \mathbf{P}_n \Rightarrow \mathbf{C}.$

La raya horizontal y la doble flecha representan respectivamente la relación de inferencia lógica. Por analogía con los razonamientos, se hablará de premisas y conclusión de una regla de inferencia. Puesto que son formas válidas de razonamiento, se dará para cualquier ejemplo de sustitución de una regla lógica que si sus premisas son verdaderas, la conclusión deberá ser verdadera. El número de reglas de inferencia posibles es infinito (del mismo modo que lo es el número de formas válidas de razonamiento).

Los lógicos han propuesto diferentes conjuntos finitos de reglas, seleccionadas, como se ha mencionado ya, por su evidencia, simplicidad o utilidad. Estos conjuntos constituyen sistemas de reglas que pueden ser vistos como "máquinas lógicas" cuya función es realizar inferencias a partir de información dada o determinar si un determinado razonamiento es válido. Así, pueden ofrecerse conjuntos de reglas, consideradas más elementales o básicas, que sirvan para obtener potencialmente todas las restantes reglas, las que serán reglas derivadas o secundarias.

Las reglas de inferencia constituyen el núcleo de la lógica, sus "entidades básicas", por así decirlo. Sin embargo, es posible otro enfoque en el cual la lógica aparece fundamentalmente como la ciencia de las *leyes lógicas*. Sin entrar aquí en detalles técnicos, puede decirse que una ley lógica es una forma de enunciado, cuyas instancias son todas verdaderas, son "verdades necesarias", enunciados verdaderos en toda circunstancia, sin poder ser nunca falsos. El paralelismo con las reglas de inferencia salta a la vista. Las leyes lógicas pueden verse como un caso extremo de reglas lógicas, esto es, como reglas lógicas que no tienen premisas. Piénsese en la definición de forma válida de razonamiento basada en el concepto de verdad: Todo ejemplo de sustitución que tenga premisas verdaderas tendrá también conclusión verdadera. Una ley lógica tendrá todo caso de sustitución verdadero, de modo que, vista como una regla, no importa qué enunciado(s) (si verdadero(s) o falso(s)) se coloque(n) como premisa(s), la conclusión será siempre verdadera, de modo que siempre será una regla válida. Y esta es una manera de interpretar el hecho de que sus casos son verdaderos "en toda circunstancia": cualquier condición los hará siempre verdaderos. Aquí se considerará, entonces, el concepto de regla lógica como primario o básico y el de ley lógica como secundario, derivado o definido.

En lo que sigue nos referiremos exclusivamente a reglas lógicas y leyes lógicas de la Lógica de Predicados de Primer Orden. Es decir, las premisas y la conclusión de una regla lógica serán formas de enunciados del lenguaje de predicados de primer orden y las leyes lógicas serán formas de enunciado del lenguaje de predicados de primer orden.

Dado un sistema de deducción cualquiera (Deducción Natural, Arboles, Secuentes, sistemas axiomáticos, etc.) que sea adecuado para la lógica de predicados de primer orden, sucederá que la conclusión de la regla será *derivable* en el sistema a partir de la(s) premisa(s) de la regla. Y, del mismo modo, toda ley lógica deberá ser una fórmula *derivable* sin recurrir a premisas, es decir, un *teorema*, del sistema. De manera paralela, desde el punto de vista semántico, la conclusión de todo caso de sustitución de una regla será *consecuencia lógica* de las premisas, e, igualmente, toda caso de una ley lógica será una *verdad lógica*. Por extensión, se aplicarán los conceptos de consecuencia lógica y verdad lógica a las reglas y leyes mismas, además de a sus instancias.

A continuación, se ofrece una lista de reglas lógicas, y ulteriormente de leyes lógicas, de la Lógica de Predicados de Primer Orden. Todas ellas muestran propiedades interesantes de la lógica de predicados de primer orden o han cumplido un papel importante en la historia de la lógica y se la ha tomado como ejemplos típicos de lo que se entiende por la deducción. Algunas de ellas funcionan como las reglas básicas en determinados sistemas de deducción.

Como se señaló antes, el signo $\Rightarrow$ indicará el paso de premisas a conclusión (relación de inferencia lógica) que, según el caso, puede interpretarse como la relación de derivabilidad o demostrabilidad en un sistema de deducción específico o como la relación de consecuencia lógica (definida en términos de valuaciones o modelos). Asimismo, el signo $\Leftrightarrow$ indicará que la relación de inferencia vale en un doble sentido, o sea, puede interpretarse como la relación de equivalencia lógica (tanto relativa a la demostrabilidad en un sistema lógico como relativa al concepto semántico de consecuencia lógica). Se hará uso de las convenciones usuales respecto de la eliminación de paréntesis.

1. Reglas lógicas

1.1 Reglas de cuantificadores:

Instanciación universal: $\forall x\ A[x] \Rightarrow A[a]$
Generalización existencial: $A[a] \Rightarrow \exists x A[x]$
Descenso cuantificacional: $\forall x\ A[x] \Rightarrow \exists x\ A[x]$
Conmutatividad del cuantificador universal: $\forall x \forall y A[xy] \Leftrightarrow \forall y \forall x A[xy]$
Conmutatividad del cuantificador existencial: $\exists x \exists y A[xy] \Leftrightarrow \exists y \exists x A[xy]$
Conmutatividad del cuantificador existencial y el universal: $\exists x \forall y A[xy] \Rightarrow \forall y \exists x A[xy]$

1.2. Reglas de conjunción y de disyunción:

Producto Lógico: $A, B \Rightarrow A\&B$.
Simplificación: (a) $A\&B \Rightarrow A$; (b) $A\&B \Rightarrow B$.
Adición: (a) $A \Rightarrow A \vee B$; (b) $B \Rightarrow A \vee B$.

1.3. Reglas del condicional

Modus Ponens: $A, A \rightarrow B \Rightarrow B$.
Silogismo Hipotético: $A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C$.
Conmutación de Antecedentes: $A \rightarrow (B \rightarrow C) \Rightarrow B \rightarrow (A \rightarrow C)$.
Carga de Antecedente: $B \Rightarrow A \rightarrow B$.

1.4. Reglas de la negación

Doble Negación: $\neg\neg A \Rightarrow A$.
Eliminación de la Doble Negación: $A \Rightarrow \neg\neg A$.
Regla del *Ex Falso Quodlibet*: $A\&\neg A \Rightarrow C$.

1.5. Reglas de condicional y conjunción

Importación: $A \rightarrow (B \rightarrow C) \Rightarrow A \& B \rightarrow C$.
Exportación: $A \& B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

1.6. Reglas de condicional y negación

Modus Tollens: $A \rightarrow B, \neg B \Rightarrow \neg A$.
Contraposición: $A \rightarrow B \Rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$.

1.7. Silogismo disyuntivo

(a) $A \vee B, \neg A \Rightarrow B$ (b) $A \vee B, \neg B \Rightarrow A$.

1.8. Dilemas

Simple: $A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow C \Rightarrow C$.
Complejo: $A \vee B, A \rightarrow C. B \rightarrow D \Rightarrow C \vee D$.

1.9. Reglas de sustitución de variable ligada:

(a) $\forall x\ A[x] \Leftrightarrow \forall y\ A[y]$ (b) $\exists x\ A[x] \Leftrightarrow \exists y\ A[y]$

1.10. Reglas de equivalencia de cuantificadores

(a) $\neg\forall x\ A[x] \Leftrightarrow \exists x\ \neg A[x]$ (b) $\neg\exists x\ A[x] \Leftrightarrow \forall x\ \neg A[x]$
(c) $\exists x\ A[x] \Leftrightarrow \neg\forall x\ \neg A[x]$ (d) $\forall x\ A[x] \Leftrightarrow \neg\exists x\ \neg A[x]$ (interdefinición de cuantificadores).

1.11. Reglas de De Morgan

(a) $\neg(A\&B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ (b) $\neg(A\vee B) \Leftrightarrow \neg A \ \&\ \neg B$.

1.12. Reglas de Equivalencia (o Interdefinición) de conectivas:

Condicional: (a) $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$ (b) $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg(A\&\neg B)$.
Disyunción: (a) $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \ \&\ \neg B)$ (b) $A \vee B \Leftrightarrow \neg A \rightarrow B$.
Conjunción: (a) $A \ \&\ B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$ (b) $A \ \&\ B \Leftrightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$.

Bicondicional: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A\rightarrow B \ \&\ (B\rightarrow A)$.
Definición del condicional mediante el bicondicional: $A \rightarrow B \Leftrightarrow A \leftrightarrow A\&B$.
Disyunción exclusiva: (a) $A \text{ w } B \Leftrightarrow (A\&\neg B) \vee(\neg A\&B)$. (b) $A \text{ w } B \Leftrightarrow \neg(A\leftrightarrow B)$.

1.13. Reglas de Distribución de Cuantificadores (reglas "prenexas")

Cuantificador universal:
$\forall x(A[x] \ \&\ B[x]) \Leftrightarrow \forall xA[x] \ \&\ \forall xB[x]$.
$\forall x(A[x] \rightarrow B[x]) \Rightarrow \forall xA[x] \rightarrow \forall xB[x]$.
$\forall x(A[x] \vee \forall xB[x]) \Rightarrow \forall xA[x] \vee \exists xB[x]$.

Cuantificador existencial:
$\exists x(A[x] \vee B[x]) \Leftrightarrow \exists xA[x] \vee \exists xB[x]$.
$\exists xA[x] \rightarrow \exists xB[x] \Rightarrow \exists x(A[x] \rightarrow \exists xB[x])$.
$\exists xA[x] \ \&\ \forall xB[x] \Rightarrow \exists x(A[x] \ \&\ B[x])$.

1.14. Reglas "booleanas" (propiedades de conjunción y disyunción)

Conmutatividad: (a) $A \ \&\ B \Leftrightarrow B \ \&\ A$ (b) $A\vee B \Leftrightarrow B\vee A$.
Asociatividad: (a) $(A\&B)\&C \Leftrightarrow A\&(B\&C)$ (b) $(A\vee B)\vee C \Leftrightarrow A\vee (B\vee C)$.
Distributividad: (a) $A\&(B\vee C) \Leftrightarrow (A\&B) \vee (A\&C)$ (b) $A\vee (B\&C) \Leftrightarrow (A\vee B) \ \&\ (A\vee C)$.
Idempotencia: (a) $A\&A \Leftrightarrow A$ (b) $A\vee A \Leftrightarrow A$.
Absorción: (a) $A \ \&\ (A\vee B) \Leftrightarrow A$ (b) $A \vee (A\&B) \Leftrightarrow A$.
Contradicción: (a) $A \ \&\ \bot \Leftrightarrow \bot$ (b) $A \vee \bot \Leftrightarrow A$.
Tautología: (a) $A \ \&\ \top \Leftrightarrow A$ (b) $A \vee \top \Leftrightarrow \top$.
Definición $\top$: $\top \Leftrightarrow A \vee \neg A$. Definición $\bot$: $\bot \Leftrightarrow A \ \&\ \neg A$.

1.15. Regla de equivalencia de doble negación: $A \Leftrightarrow \neg\neg A$

1.16. Teorema de Hauber: $A \rightarrow B$, $C \rightarrow D$, $A \vee C$, $\neg(B \& D) \Rightarrow (B \rightarrow A) \& (D \rightarrow C)$

1.17. Otras reglas relativas a distribución de cuantificadores

3.3.1 $\forall x\, (A \& B[x]) \Leftrightarrow A \,\&\, \forall x B[x]$.
3.3.2 $\forall x\, (A \vee B[x]) \Leftrightarrow A \vee \forall x B[x]$.
3.3.3 $\forall x\, (A \rightarrow B[x]) \Leftrightarrow A \rightarrow \forall x B[x]$.
3.3.4 $\exists x\, (A \& B[x]) \Leftrightarrow A \,\&\, \exists x B[x]$.
3.3.5 $\exists x\, (A \vee B[x]) \Leftrightarrow A \vee \exists x B[x]$.
3.3.6 $\exists x\, (A \rightarrow B[x]) \Leftrightarrow A \rightarrow \exists x B[x]$.
3.3.7 $\forall x\, (B[x] \rightarrow A) \Leftrightarrow (\exists x B[x] \rightarrow A)$.
3.3.8 $\exists x\, (B[x] \rightarrow A) \Leftrightarrow (\forall x B[x] \rightarrow A)$.
(Observación: en 3.3.1 a 3.3.8 se supone que x no aparece libre en A.)
3.3.9 $\forall x\, \exists y (A[x] \,\&\, B[y]) \Leftrightarrow \forall x A[x] \,\&\, \exists y B[y]$.
3.3.10 $\forall x\, \exists y (A[x] \vee B[y]) \Leftrightarrow \forall x A[x] \vee \exists y B[y]$.

2. Transformación de reglas lógicas en leyes lógicas: El (Meta)Teorema de la Deducción

La analogía entre la relación de inferencia lógica y el condicional (llamado "condicional material") salta a la vista. Más precisamente, lo que sucede es que si un enunciado B se deriva (o demuestra) en un sistema de deducción (semánticamente adecuado) a partir de otro enunciado A y un conjunto Γ de enunciados (eventualmente vacío) (o, de manera equivalente, B es consecuencia lógica de A y Γ), entonces el condicional entre A y B es demostrable en el sistema a partir de Γ (o, de manera equivalente, es consecuencia lógica de Γ). Expresado esquemáticamente, esto queda como:

(2.1) Si $\Gamma, A \Rightarrow B$, entonces $\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B$.

En el caso particular de que Γ sea el conjunto vacío, se tiene:

(2.2) Si $A \Rightarrow B$, entonces $\Rightarrow A \rightarrow B$.

Es decir $A \rightarrow B$ es un enunciado demostrable o una verdad lógica, de modo que representa una ley lógica. Estas afirmaciones pueden generalizarse del siguiente modo:

(2.3) Si $A_1, A_2,..., A_n \Rightarrow B$, entonces $\Rightarrow (A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (...(A_n \rightarrow B) ...))$,

es decir $(A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (...(A_n \rightarrow B) ...))$ es una ley lógica. A su vez, (2.3) es equivalente con la siguiente afirmación:

(2.4) Si $A_1, A_2,..., A_n \Rightarrow B$, entonces $\Rightarrow (A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, ...A_n) \rightarrow B$.

Todas estas afirmaciones pueden demostrarse por medio de valuaciones o en cualquier sistemas de deducción. En este último caso se está frente a lo que se ha llamado:

2.1 (Meta)Teorema de la Deducción: Sea un sistema de deducción S adecuado para la Lógica de Predicados de Primer Orden y sean A y B dos enunciados del LPO, entonces si B es demostrable (derivable) en S a partir de A y un conjunto (eventualmente vacío) de enunciados del LPO Γ, entonces $A \rightarrow B$ es demostrable (derivable) en S a partir de Γ.

Por su grado de generalidad, el teorema de deducción debe demostrarse para el caso de la derivación de cualquier enunciado B a partir de cualquier enunciado A y cualquier conjunto de enunciados. La derivación puede variar en el número de pasos, pero obviamente siempre empleará el mismo conjunto de reglas (y, según el sistema) de axiomas. Así la demostración deberá hacerse por inducción matemática en el número de pasos de la derivación en el sistema (esto es, por la longitud de la derivación). Para la demostración del teorema de la deducción véase, por ejemplo, Hunter 1981, pp. 103 y ss. y también, como un texto clásico, Church 1956, pp. 86-90 y 196-201, donde se demuestra para sistemas axiomáticos. Ahora bien, en el caso de los sistema de la Deducción Natural y de Secuentes la demostración surge directamente de las respectivas reglas de introducción del condicional.

El teorema de la deducción indica una manera de transformar cualquier regla lógica en una ley lógica. Por ejemplo, tómese el caso de la regla de simplificación que aparece más arriba, las leyes lógicas correspondientes serán:

(2.5) (a) $A\&B \rightarrow A$; (b) $A\&B \rightarrow B$.

Del mismo modo, las *reglas* de De Morgan se convierten en la siguientes *leyes* de De Morgan:

(2.6) (a) $\neg(A\&B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$ (b) $\neg(A\vee B) \rightarrow \neg A \& \neg B$.

Igualmente, la regla de distribución del cuantificador universal queda convertida en la siguiente ley correspondiente:

(2.7) $(\forall x(A[x] \rightarrow B[x])) \rightarrow (\forall xA[x] \rightarrow \forall xB[x])$.

Y lo mismo en los restantes casos.

3. Leyes lógicas

Se presentan a continuación algunas leyes lógicas. Algunas de ellas no tiene forma condicional, de ahí que no se las obtenga naturalmente de reglas. Otras se han dado primariamente como leyes en la historia de la lógica.

3.1 Los tres principios lógicos clásicos

Principio de identidad: $A \rightarrow A$.
Principio de no contradicción: $\neg(A \& \neg A)$.
Principio de tercero excluido: $A \vee \neg A$.

3.1.1. Versiones generalizadas

Principio de no contradicción generalizado: $\neg(\forall xA[x] \ \& \ \exists x \neg A[x])$
Principio de tercero excluido generalizado: $\forall xA[x] \vee \exists x \neg A[x]$

3.2 Otras leyes relativas al condicional con otras conectivas

3.2.1 $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ (distribución del condicional).
3.2.2 $A \to ((A \to B) \to B)$.
3.2.3 $((A \to B) \to A) \to A$ (ley de Peirce).
3.2.4 $\neg A \to (A \to B)$ (ley de Duns Scoto).
3.2.5 $A \to (\neg A \to B)$.
3.2.6 $(\neg A \to A) \to A$ (ley de Clavius o *consequentia mirabilis*).
3.2.7 $(A \to \neg A) \to \neg A$.
3.2.8 $(A \to B) \to ((A\&C) \to (B\&C))$.
3.2.9 $A \to (A\&B \to B)$.
3.2.10 $(A \to B) \to (A \to (C \to B))$ (interpolación del condicional).
3.2.11 $(A \vee B \to C) \to (A \to C) \ \& \ (B \to C)$.
3.2.12 $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$.

4. Leyes relativas a la identidad

La inclusión de reglas y leyes relativos al símbolo de identidad = da lugar a la Lógica de Primer Orden con Identidad. En la historia de la lógica ha prevalecido la presentación de la "lógica de la identidad" mediante principios o leyes, siguiendo la idea de que esta constituye una *teoría* (con un dominio universal), más que un mecanismo inferencial. Las siguientes son leyes características de la relación de identidad:

Propiedad de reflexividad de la identidad: $\forall x \ x=x$.
Propiedad de simetría de la identidad: $\forall x \forall y \ (x=y \to y=x)$.
Propiedad de transitividad de la identidad: $\forall x \forall y \forall z \ (x=y \ \& \ y=z \to x=z)$.
Ley de sustitución de idénticos (ley de indescirnibilidad de los idénticos):

$$\forall x \forall y \ (x=y \to (A[x] \to A[y])).$$

Por medio de estas leyes puede consGtruirse un sistema axiomático para la identidad, donde estas son sus axiomas.

5. El metateorema de sustitución uniforme de fórmulas atómicas

Sea **C** un enunciado cualquiera del LPO, en el cual una fórmula *atómica* cualquiera **A** de LPO aparece un número n de veces. Entonces, si **A** es sustituida uniformemente en todas sus apariciones por otra fórmula cualquiera **B** de LPO, lo que queda expresado como **C***, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

5.1 Si **C** es un teorema de un sistema de deducción S para la Lógica de Predicados de Primer Orden, entonces **C*** es también teorema de S.

5.2 Si **C** es una verdad lógica, entonces **C*** es también verdad lógica.

Estas dos afirmaciones pueden generalizarse para el caso de relaciones de derivabilidad (demostrabilidad) en sistemas de deducción y de consecuencia lógica. Sean $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ ..., $\mathbf{P}_n$ y **C** enunciados de LPO, y sean $\mathbf{P}^*_1$, $\mathbf{P}^*_2$ ..., $\mathbf{P}^*_n$ y **C*** los enunciados resultantes de sustituir en todos ellos una fórmula atómica **A** por otra fórmula **B**. Entonces se cumple:

5.3 Si **C** se deriva en un sistema cualquiera S de deducción para la Lógica de Predicados de Primer Orden a partir de $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ ..., $\mathbf{P}_n$, entonces **C*** se deriva en S de $\mathbf{P}^*_1$, $\mathbf{P}^*_2$ ..., $\mathbf{P}^*_n$.

5.4 Si **C** es consecuencia lógica de $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ ..., $\mathbf{P}_n$, entonces **C*** es consecuencia lógica de $\mathbf{P}^*_1$, $\mathbf{P}^*_2$ ..., $\mathbf{P}^*_n$.

6. El metateorema de reemplazo o intercambio de equivalentes

Sea **C**[**A**] un enunciado cualquiera del LPO, que contiene a la fórmula cualquiera **A** de LPO un número n de veces y sea una fórmula **B** equivalente a **A** (esto es, el bicondicional $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$ es es un teorema en cualquier sistema S de deducción para la Lógica de predicados de primer orden y también es un enunciado lógicamente verdadero). Entonces se cumple:

6.1. **C**[**B**] es derivable en S a partir de **C**[**A**], siendo S cualquier sistema de deducción para la Lógica de predicados de primer orden.

6.2. **C**[**B**] es consecuencia lógica de **C**[**A**].

La demostración de estas dos afirmaciones debe hacerse por inducción sobre el grado de **C**[**A**]. De ellas se obtiene la siguiente (meta)regla de inferencia:

6.3. $\mathbf{C}[\mathbf{A}], \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{C}[\mathbf{B}]$.

7. Propiedades de la relación de inferencia lógica

La relación de inferencia lógica posee las siguientes cuatro propiedades generales, presentadas en relación con enunciados del LPO.

Reflexividad: **A** se infiere de **A**.
Monotonía: Si **C** se infiere de $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ ..., $\mathbf{A}_n$, entonces **C** se infiere de $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ ..., $\mathbf{A}_n$ y un enunciado cualquiera **B**.
Transitividad: Si **B** se infiere de $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ ..., $\mathbf{A}_n$ y **C** se infiere de $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ ..., $\mathbf{A}_n$ y **B**, entonces **C** se infiere de $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ ..., $\mathbf{A}_n$.
Sustitución uniforme: **A**[**y**] se infiere de **A**[**x**], si se sustituyen todas las apariciones de la variable **x** por la variable **y** en **A**[**x**].

Estas propiedades valen también cuando la relación de inferencia lógica se entiende como la relación de *consecuencia lógica*, formulada en términos de valuaciones o de modelos, o como la relación de *derivabilidad* de un sistema formal cualquiera para la lógica de predicados de primer orden.